

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO.

Liliani Aparecida Valieri Apolinário, Reginaldo de Oliveira Reinaldes, José Marcos Lopes, Gláucia Maria Queiroz de Freitas, Isaura Christian Cecci. – Matemática - Departamento de Matemática - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Campus de Ilha Solteira.

Apresentamos neste trabalho uma proposta de como introduzir os conceitos básicos sobre a teoria de matrizes, determinantes e sistemas lineares, através da Metodologia de Resolução de Problemas para o ensino médio. Este projeto está sendo aplicado desde agosto de 2006 pelas professoras, Gláucia Maria Queiroz de Freitas e Isaura Christian Cecci em duas salas do ensino médio da Escola Estadual “João Brembatti Calvoso”, Andradina - SP.

Para o desenvolvimento do presente projeto, seguimos as recomendações dos PCNEM; ou seja; desejamos ensinar matemática através da resolução de problemas. Nesta metodologia, o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento.

De acordo com os PCNEM – a, (1997), os alunos devem perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras com as quais é possível modelar a realidade e interpretá-la. A Matemática deve também ser vista como ciência, assim suas definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outras e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados, a aquisição do conhecimento matemático está vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático, esse domínio passa por um processo lento e trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas. Ao professor cabe a tarefa de mostrar que a Matemática não é ciência para uns poucos cérebros privilegiados, mas que todos podem aprendê-la.

A pesquisa em Resolução de Problemas apresenta uma evolução desde a clássica obra de Polya (1945) – A arte de Resolver Problemas. Conforme destacado em Grandó e Fazzion (2001), três interpretações para a resolução de problemas são fornecidas por Mendonça (1993):

1ª interpretação	2ª interpretação	3ª interpretação
Resolução de problemas como objetivo final	Resolução de problemas como processo heurístico	Resolução de problemas como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos
- ensina-se a teoria, o conteúdo, para resolver problemas.	- desenvolve-se o potencial heurístico do aluno como resolvidor de problemas; - objetiva-se aprimorar a escolha de estratégias.	- o problema “dispara” o movimento de aprendizagem, ou seja, o problema é visto como desencadeador da formação de conceitos matemáticos; - valorização do raciocínio abduutivo.

Tradicionalmente, os problemas eram utilizados apenas como forma de aplicação e verificação de conhecimentos adquiridos anteriormente. Nesse caso, a concepção de ensino e aprendizagem se dava por um processo de reprodução/imitação.

Na perspectiva atual, o que se pretende é ensinar matemática através da resolução de problemas. A resolução de problemas como uma metodologia de ensino é relativamente recente e segundo Onuchic (1999, p.207) é a abordagem mais consistente com as recomendações dos PCNs.

A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Assim na análise dessas situações pode-se utilizar recursos abordados na Matemática, lançar mão de situações-problema para a construção e aplicação de conceitos matemáticos. Em termos metodológicos, relativos ao ensino do conteúdo, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, isto é, de situações em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de

estratégia para resolvê-los. A situação-problema deve expressar aspectos-chaves para o conceito que se quer estudar, o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas. Assim, um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos através de uma série de generalizações.

Segundo os PCNEM – b, (1997),

“a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas”. (BRASIL, MEC/SEF, 1997, p. 43).

Quando se pretende ensinar matemática através da resolução de problemas, o problema deve ser cuidadosamente escolhido e servirá como um elemento para disparar o processo de construção do conhecimento, este deverá contribuir para a formação dos conceitos que se pretende estudar, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal, o foco está na ação por parte dos alunos. Vários problemas deverão ser propostos e resolvidos livremente pelos próprios alunos. Para a utilização da metodologia de resolução de problemas, é de fundamental importância o trabalho em grupo. Ao professor cabe o papel de propor, mediar, controlar e incentivar a aprendizagem através da resolução do problema. A interação entre alunos é também importante na formação das capacidades cognitivas e afetivas. Um aluno, por si só, provavelmente não tenha coragem de defender a solução que apresentou para determinado problema, mas depois de compartilhar e discutir esta solução com os elementos do grupo, se sentirá mais seguro para defender suas idéias.

Segundo os PCNEM – b, (1997), o trabalho em grupo propicia aos alunos as seguintes aprendizagens:

- “perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
- saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro;
- discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias idéias;
- incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.” (BRASIL, MEC/SEF, 1997, p. 40).

Os problemas iniciais serão utilizados para a introdução e a sistematização dos conceitos, assim deverão ser problemas simples e de fácil interpretação. Sempre que possível, materiais concretos e problemas contextualizados deverão ser utilizados. Só depois da resolução de vários problemas é que o conceito poderá ser sistematizado, através do formalismo da matemática, definições e propriedades.

Ainda segundo Grando e Fazzion (2001), já existe a preocupação por parte de alguns professores em assumir a metodologia de resolução de problemas em suas atividades didáticas, entretanto cada professor utiliza um enfoque, seguindo suas próprias concepções de aluno, professor e ensino-aprendizagem. Numa perspectiva didático-metodológica envolvendo a metodologia de resolução de problemas como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos, o aluno é ativo, assumindo uma postura de investigador e construtor do seu próprio conhecimento, a resposta correta tem seu valor diminuído e a ênfase deve ser dada ao processo de resolução, o erro serve para a reflexão do aluno sobre sua ação e é importante para o professor pois o ajuda a compreender e interpretar o desenvolvimento das idéias do aluno.

O trabalho com esta metodologia será mais motivador para os alunos se apresentado juntamente com a utilização de recursos tecnológicos como a máquina de calcular e o computador. Outras metodologias como por exemplo, os jogos podem também contribuir para tornar a utilização da resolução de problemas bastante atraente para os alunos.

Entendemos que utilizando a metodologia de resolução de problemas, a sequência mais adequada para se introduzir esta importante parte da álgebra no ensino médio é a seguinte. Inicia-se o estudo com sistemas lineares, com ênfase na “montagem” do sistema linear e no método de escalonamento. Posteriormente estuda-se a teoria de matrizes, considerando as operações básicas, suas principais propriedades e destacando o fato que matrizes surgem naturalmente no estudo de sistemas lineares. Finalmente, apresenta-se o conceito de determinantes, de modo que estes surjam durante a

resolução de sistemas lineares. Fecha-se o tópico com o estudo do método de Cramer para a solução de um sistema linear e o cálculo da matriz inversa usando o conceito de cofatores.

O estudo sobre sistemas lineares, objetiva fornecer ao aluno do ensino médio uma ferramenta eficaz para a resolução de problemas, equacionados através de sistemas lineares, com no máximo 3 equações e 3 incógnitas. Aprender a resolver um sistema linear deverá decorrer da necessidade de solucionar alguma situação-problema. Um sistema de equações lineares pode ser resolvido sem a utilização de uma técnica específica, entretanto o excesso de trabalho que isso apresenta, justifica a utilização de alguma técnica que sistematize e simplifique seu processo de resolução. A técnica mais conveniente neste caso é a de escalonamento – eliminação de Gauss, a qual baseia-se em combinações lineares das equações dos sistemas.

Para sistemas lineares de ordem baixa (2×2 ou 3×3) a Regra de Cramer pode também ser utilizada, entretanto se o sistema linear possui 20 equações e 20 incógnitas e utilizarmos um computador que efetua cerca de cem milhões de multiplicações por segundo, o método de Cramer demoraria 3×10^8 anos para resolver este sistema (claro que sem contar com problemas como queda de energia, defeitos na máquina, e etc.). Usando o computador mencionado acima e o método de eliminação de Gauss, a solução do sistema é obtida em poucos segundos.

A idéia inicial é trabalhar com problemas simples, de modo que os alunos consigam resolvê-los, apenas usando raciocínios lógicos, sem a “montagem” do sistema linear. Para uma etapa posterior os sistemas lineares representarão o modelo matemático de algum problema “real” que estaremos interessados em resolver. Os alunos deverão livremente propor suas soluções, através dos processos ou métodos de resolução que aprenderam no ensino fundamental: método da substituição e método da adição. Basicamente, o trabalho com estes problemas tem os seguintes objetivos:

- representar o problema “real” através do modelo matemático que corresponde a um sistema linear;
- aprender a classificar um sistema linear como: determinado, indeterminado e impossível;
- discutir as propriedades que serão utilizadas na resolução do sistema linear, através da técnica de escalonamento e
- fazer com que o aluno perceba que geometricamente, no caso 2×2 , cada equação representa a equação de uma reta no plano cartesiano. Assim resolver um sistema linear com duas equações e duas incógnitas é equivalente a determinar-se (caso exista) a intersecção dessas duas retas.

Os objetivos mencionados acima, são metas que o professor deve atingir, assim estas não devem ser mencionados aos alunos. Ao professor cabe o papel de selecionar adequadamente os problemas para que estes objetivos sejam alcançados. Posteriormente serão trabalhados problemas com o objetivo de fazer com que os alunos “redescubram” as chamadas operações elementares entre linhas de um sistema linear, as quais fornecem a base teórica do método de escalonamento.

A teoria de matrizes tem aplicações em diversas áreas do conhecimento humano. Como exemplos na física, economia, estatística, psicologia e etc. Com o advento do computador, grandes quantidades de informações podem ser armazenadas e manipuladas de maneira bastante rápida com o uso de matrizes. É difícil convencer os alunos do ensino médio da importância da teoria de matrizes. Para a maioria dos alunos esta teoria não passa de um amontoado de regras difíceis de serem memorizadas e manipuladas e sem utilidade prática. Para tentar superar este obstáculo consideramos útil trabalhar com matrizes somente após o trabalho com sistemas lineares e introduzir os conceitos através da metodologia de resolução de problemas.

Adotando esta seqüência da matéria, as matrizes surgem naturalmente durante a resolução de sistemas lineares pelo método de eliminação, as variáveis (incógnitas) não precisam ser escritas durante a fase de escalonamento do sistema linear, podem ficar “escondidas”. A utilização da metodologia de resolução de problemas terá por objetivo fazer com que o aluno perceba que o arranjo das informações em formato de tabelas (matrizes) torna a tarefa de resolver um problema bem mais simples e atrativa. Os conceitos básicos da teoria de matrizes, como adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes deverão ser obtidos pelos próprios alunos. O aluno deve ter participação ativa no “redescobrimento” destas operações e suas principais propriedades. Sem dúvida a multiplicação de matrizes é o conceito mais difícil de ser compreendido pelos alunos neste nível de escolaridade.

Noções ligadas a determinantes são conhecidas desde 250 A.C., os chineses utilizavam estas noções no desenvolvimento de técnicas para a resolução de sistemas lineares. Apenas no século XIX é que os determinantes passaram a ser estudados mais sistematicamente, principalmente pelo

matemático francês Cauchy – o inventor das matrizes. Cauchy foi quem deu o nome de determinante a função que a uma matriz associa um número. E foi Cayley em 1841, quem criou a notação usual – um quadrado de números com duas barras. Nesta mesma época o matemático francês Binet demonstrou o teorema da multiplicação de determinantes. Significativas contribuições para a teoria de determinantes foram obtidas pelo matemático alemão Jacobi (1804-1851).

Nos dias atuais, o uso de determinantes como um número associado a uma matriz quadrada mostra-se muito útil para caracterizar muitas situações, como a de saber se uma dada matriz é inversível, se um sistema linear admite ou não solução, se três pontos do plano cartesiano estão alinhados, cálculo da área de um triângulo determinado por três pontos do plano cartesiano e etc. Entendemos não ser necessário a apresentação de todas as propriedades sobre esta teoria. As principais propriedades devem surgir naturalmente da resolução de problemas. Neste nível de escolaridade, os alunos devem ser capazes de confirmar uma certa propriedade. Não se deve exigir a rigorosa demonstração matemática destas propriedades. Nem todos os alunos que concluem o ensino médio seguirão carreira na área de ciências exatas, muitos destes, se quer terão a oportunidade de ingressar em um curso de nível superior. Um estudo matemático rigoroso sobre determinantes envolve muitos símbolos, o que dificulta em muito a sua leitura e compreensão. A idéia básica é utilizar a resolução de problemas, para de uma maneira simples, introduzir este importante conceito matemático.

A utilização da metodologia de resolução de problemas em sala de aula é mais trabalhosa para o professor mais certamente muito mais produtiva para os alunos. O aluno se torna ativo na construção de seu próprio conhecimento. Segundo os PCN₊ (1997): “a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos”.

Como dissemos no início, este é um projeto em andamento, o que esperamos com a utilização desta metodologia, é além de obter dos alunos um melhor desempenho em matemática, poder estar contribuindo com a formação plena do cidadão. Quantos são os problemas e quantas são as decisões que devemos tomar a cada dia de nossa vida? O que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser passageira, mas o desenvolvimento do raciocínio é para sempre.

“O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.” – Polya (1945, prefácio 1ª edição).

Mudar a forma de se ensinar matemática é tarefa árdua e lenta; mas só depende de nós, professores.

Referências Bibliográficas

- [1] GRANDO, R. C. e FAZZION, M. F. *Álgebra e Geometria na Resolução de um Problema Clássico em Matemática: o problema dos cubos pintados*. Revista de Educação Matemática – SBEM - SP, n. 6 e 7, p.23-26, Catanduva - SP, 2001.
- [2] MENDONÇA, M. C. D. *Problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática*. Campinas: UNICAMP, 1993, Tese de Doutorado,
- [3] ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V. (org). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. Editora UNESP, São Paulo(SP), p. 199-218, 1999.
- [4] POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1986.
- [5] SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – PCN₊: Matemática. MEC, Brasília (1997)
- [6] _____ a. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino médio - Matemática. MEC, Brasília (1997)
- [7] _____ b. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ensino fundamental - Matemática. MEC, Brasília (1997)

Bolsa: NÚCLEO DE ENSINO, PROEX/UNESP.